

מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 27 - מטריצות

תוכן העניינים

1. מטריצות.....1
2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות.....3
3. המטריצה ההופכית.....4

מטריצות

שאלות

- 1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2) מצאו את x, y, z , אם ידוע כי $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr(D^2 - 2E)$

5) א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6) $I_2 BC$

7) $tr(C^T C)$

8) $DABC$

תשובות סופיות

- (1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא.
ו. 6×6 ז. 6×2 ח. לא. ט. 6×2 י. 6×6

(2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

- (1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
1. AA^T סימטרית. 2. $A + A^T$ סימטרית. 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.
- (2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. $A^2 - B^2$ סימטרית. 3. $A^2 + B$ סימטרית.
- (3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A - B)^2$ סימטרית.
- (4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו: 1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.
- (5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-6 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובה על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(7) \text{ עבור אילו ערכים של הקבוע } k \text{ המטריצה } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix} \text{ הפיכה?}$$

הניחו שהמטריצות בשאלות 8-10 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את המטריצה X :

$$(8) \quad AXC = D \quad \text{א.} \quad A^{-1}XC = A^{-1}DC \quad \text{ב.} \quad P^{-1}X^T P = A \quad \text{ג.}$$

$$(9) \quad C^{-1}(A+X)D^{-2} = I \quad \text{א.} \quad (A-AX)^{-1} = X^{-1}C \quad \text{ב.}$$

$$(10) \quad ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$$

$$(11) \text{ נתון } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{חשבו את המטריצה } X, \text{ אם ידוע כי } B^2 X (2B)^{-1} = B + I.$$

$$(12) \text{ נתון } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ חשבו את המטריצה } Y, \text{ אם ידוע כי } BYB^T = B^{-1} + B.$$

$$(13) \text{ נתון } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{חשבו את המטריצה } B, \text{ אם נתון בנוסף כי: } 5A^T B (I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}.$$

14) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5 \quad \text{א.}$$

$$6x + 4y + z = 2$$

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1 \quad \text{ב.}$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x - y + z = 3$$

15) פתרו את המערכת הבאה בעזרת המטריצה ההפוכה: $3x - 2y + 2z = 5$.

$$5x - 3y + 4z = 11$$

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

16) פתרו את המערכת הבאה בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (7)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1} D C^{-1} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$(A + C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$BA^T C (B^{-1})^T BC^T \quad (10)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (15)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (16)$$